

CAPÍTULO 2.- Diseño de la investigación.

INTRODUCCIÓN.

A lo largo de este capítulo, se describe la metodología que se ha utilizado para realizar esta investigación. Por ello, inicialmente establecemos la formulación del problema que se va estudiar para, posteriormente, ir haciendo un repaso de la diferentes etapas que constituyen este trabajo. Al ser una investigación de tipo histórico-didáctico, tanto la metodología, como los instrumentos utilizados, así como las diferentes etapas de la investigación, se adaptan a este tipo de estudios, y cada uno de los apartados de este capítulo va a centrarse en desarrollar las etapas que caracterizan a estos trabajos.

En el primer apartado, a partir de la revisión bibliográfica realizada, y el marco teórico desarrollado en el capítulo anterior, que dotan de sentido a este trabajo, se formula el problema que se pretende estudiar. Una vez especificado el problema se establecen los objetivos que se quieren conseguir y se especifican las hipótesis de la investigación. A partir de este momento, los demás apartados recogen el desarrollo de la investigación, partiendo de la determinación de las etapas del trabajo. Estas etapas incluirán la selección de las fuentes documentales, el método de recogida de datos y las categorías de análisis de la documentación.

Se ha pretendido ofrecer solamente, una visión global del trabajo realizado en cuanto a la metodología del mismo para, posteriormente en cada capítulo, desarrollar ampliamente el análisis que se ha llevado a cabo, así como las conclusiones parciales que se han obtenido.

2.1.- FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.

El propósito inicial de este trabajo consistió en realizar un estudio histórico en relación con los puntos críticos partiendo de su introducción en la enseñanza en el siglo XVII, considerando su incorporación en la enseñanza secundaria en España y la evolución que ha sufrido hasta nuestros días. Pretendemos, mediante un estudio de los libros de texto

utilizados en la enseñanza, detectar la evolución que han sufrido fundamentalmente las representaciones utilizadas en relación con este concepto y comparar estas representaciones con las nuevas introducidas por las modernas tecnologías.

Para justificar el problema que vamos a estudiar, hemos de tener en cuenta que hasta ahora el tipo de investigaciones que normalmente se hacen en Didáctica del Análisis, acometen la tarea de caracterizar los aspectos cognitivos involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje, partiendo de que muchos de estos aspectos suelen venir determinados por el modelo de enseñanza que se practique en el aula. Dicho modelo de enseñanza, muchas veces se refiere a casos muy particulares, en los que se introduce una metodología que no es la habitual en el aula. Nosotros, a partir de una encuesta previa, realizada a profesores de Castilla y León, hemos constatado, que un tanto por ciento muy elevado de dichos profesores, considera el libro de texto necesario para que los alumnos tengan organizada y secuenciada la asignatura. Es decir, “aunque cada vez hay mayor conciencia de que los materiales curriculares deben utilizarse como recursos para la enseñanza y no como única guía, los libros siguen teniendo gran influencia a la hora de tomar decisiones sobre qué y cómo enseñar, y esto influye, por supuesto, en qué y cómo aprenden los alumnos y alumnas” (García-Rodeja, 1997). Esto trae consigo una determinada manera de plantear la asignatura, en la que a pesar de las interacciones profesor-alumno que se llevan a cabo en el aula, a pesar de las situaciones de enseñanza que se desarrollen en la clase, al final el estudio y profundización que realiza el alumno se centra en la lectura, interpretación, en la mayoría de los casos en la memorización de lo que contiene el libro de texto y en la realización de los ejercicios que en él se plantean.

Por ello, consideramos necesario hacer un análisis de los libros de texto que permita caracterizar la información, estructuración y forma de hacer matemáticas que plantean a los alumnos. La adopción de un determinado libro de texto, por parte de los centros educativos y, en concreto, para las matemáticas representa una decisión con repercusiones muy significativas en el aprendizaje de los alumnos. El análisis rigurosos de los libros de texto se hace, pues, una tarea imprescindible para la toma de decisiones que conduzca a su selección. A dicho reto debe dedicarse la investigación educativa aunque no haya merecido hasta ahora la atención precisa en relación con su peso específico en la enseñanza cotidiana.

La complejidad de una investigación de esta naturaleza, por la multiplicidad de variables que pueden ser consideradas tanto formales como de contenido, exige una acotación clara del campo de estudio. Nos hemos centrado en los sistemas de representación y su caracterización, puesto que numerosas investigaciones han demostrado, que la utilización de diferentes sistemas de representación pueden conducir a los procesos de abstracción imprescindibles en la adquisición de los conceptos de las matemáticas avanzadas. Incluso para Knuth (2000), las dificultades que tienen los alumnos para establecer conexiones entre representaciones, se deben a factores instruccionales más que a factores cognitivos. Para poder caracterizar las representaciones que hemos entresacado de los libros de texto, no solamente habrá que describirlas (sintáctica o semánticamente), sino que habrá que estudiar qué tipo de función didáctica ejercen en el texto, así como los factores socio-culturales que determinan su inclusión en ellos. En relación con este último aspecto, el estudio que hemos llevado a cabo incluye, como hemos dicho anteriormente,

varios periodos de enseñanza del Análisis Matemático. Esto nos permitirá hacer un estudio comparativo para establecer las acusas que originan o dan lugar a una determinada presentación de los conceptos en los libros de texto.

Hemos tenido en cuenta, además, los programas oficiales que dan lugar a la inclusión de unos determinados contenidos en el currículo, así como las orientaciones establecidas oficialmente. Su estudio, ya realizado en investigaciones anteriores, ha constatado que dichas orientaciones no siempre se reflejan en los libros de texto.

Considerando que los conceptos analizados a través de las representaciones utilizadas, son los relativos a una rama de las Matemáticas, parece indiscutible analizar cómo presentaban estos conceptos los matemáticos en los primeros libros de texto escritos principalmente para la enseñanza en las Escuelas Politécnicas y militares. De esta forma podemos analizar la transposición didáctica llevada a cabo desde el saber sabio (libros históricos de texto), al saber a enseñar (programas oficiales) y finalmente al saber escolar (libros de texto).

Hemos centrado nuestra atención en torno a un tópico que creímos aparecería en todos los libros de texto, como es el concepto de “punto crítico”, y que además fue uno de los motores que dio pie al nacimiento del cálculo diferencial, una de las aplicaciones más características de éste y una fuente de problemas y fenómenos que podrían caracterizar las situaciones didácticas planteadas en los libros de texto. Así, aunque inicialmente buscamos caracterizar todos los tipos de representación que aparecen en los libros de texto en relación con el Análisis Matemático, pronto se vio, que aunque se podrían describir, cada uno de ellos daba lugar a tantas variedades distintas que resultaba imposible relacionarlas y, al mismo tiempo codificarlas según el libro de texto del que procedían. Para analizar más profundamente estas representaciones se requería centrar el objeto de estudio, ésta fue la razón de considerar un tópico particular.

Pretendemos, por lo tanto, realizar un estudio histórico relacionado con los puntos críticos desde el momento que se inició su enseñanza. Iniciamos dicho estudio mediante el análisis de los primeros libros de texto publicados por los matemáticos, que denominaremos libros históricos de texto, para posteriormente estudiar la evolución que han sufrido a partir del estudio de los libros de texto publicados en España durante el siglo XX y principios del siglo XXI y, finalmente, extraer las novedades que introducirán las nuevas tecnologías. Esta revisión nos permitirá realizar un acercamiento al tratamiento que han tenido estos conceptos, categorizando las formas de representación que se han utilizado.

Los interrogantes que nos planteamos son los siguientes:

- ¿Qué características poseen cada uno de los sistemas simbólicos de representación utilizados en el Análisis Matemático?
- ¿Qué tipo de sistemas simbólicos de representación utilizaban los matemáticos de los siglos XVII y XVIII en relación con los puntos críticos y de qué forma?

- ¿Cómo han variado las representaciones al introducir en la enseñanza secundaria dichos conceptos?
- ¿Qué modificaciones introducirán las nuevas tecnologías en cuanto a las representaciones de los puntos críticos?
- ¿Podemos establecer diferentes etapas en cuanto a las características y utilización de diferentes sistemas de representación?
- ¿Podemos caracterizar los libros de texto y en general los materiales curriculares según las características de los sistemas simbólicos de representación que predominan en ellos?

A partir de las preguntas anteriores, formularemos nuestros objetivos y nuestras hipótesis.

2.2.- OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN.

Los objetivos que nos hemos planteado conseguir al hacer este trabajo han sido:

1. Identificar y caracterizar los diferentes sistemas simbólicos de representación en el campo del Análisis Matemático, distinguiendo sus componentes sintácticas, semánticas, pragmático-didácticas y socio-culturales.
2. Desarrollar un modelo de análisis de libros de texto que sirva para caracterizar el tipo de representaciones que utilizan.
3. Analizar los cambios producidos en dichos sistemas de representación desde su origen, estableciendo diferentes etapas en su evolución, buscando las causas (socio-culturales, epistemológicas, didácticas) de estos cambios y las consecuencias que se puedan derivar en el proceso de enseñanza-aprendizaje.
4. Describir cada uno de los libros analizados en función de los sistemas simbólicos de representación utilizados.

2.3.- HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN.

Toda investigación debe estar dirigida o encauzada por unas presunciones explicativas de los fenómenos a estudiar que constituyen las hipótesis y cuya construcción tiene estrecha relación con la formulación de las preguntas, pues pretende ofrecer una respuesta antes de su comprobación. En concordancia con los interrogantes planteados establecemos las siguientes hipótesis:

1. Cada uno de los sistemas simbólicos de representación poseen características sintácticas, semánticas, didáctico-pragmáticas y socio-culturas muy variadas

- y que están relacionadas con diferentes concepciones de la enseñanza de la matemática.
2. Las descripciones verbales de los fenómenos relacionados con los puntos críticos en los libros históricos de texto, en las que se enfatiza claramente un pensamiento geométrico, favorece la representación de estos conceptos desde un punto de vista dinámico, que enfatiza la noción de variación asociada a las funciones.
 3. Las representaciones descriptivas y las gráficas cartesianas predominantes en los libros de texto de educación secundaria en España son representaciones de tipo estático, las cuáles tanto por sus características como por el soporte utilizado, el papel, hace que se ofrezca una visión de los conceptos del Análisis Matemático como algo fijo, intemporal y no relacionado con la idea de variación.
 4. La introducción de la nuevas tecnologías en la enseñanza-aprendizaje de los conceptos del cálculo diferencial recupera el sentido dinámico con el que están relacionados los puntos críticos.
 5. Existen distintos periodos de la enseñanza del Análisis Matemático caracterizados por la utilización de ciertos tipos de representación en los libros de texto, y por el énfasis puesto en algunas características de esas representaciones frente a otras.
 6. Dentro de cada periodo, los libros de texto no se adaptan por igual a las orientaciones establecidas en los programas oficiales, y la utilización de unos sistemas de representación frente a otros, permite clasificar los libros de texto.

Podemos clasificar las hipótesis anteriores en factográficas (¿qué ocurrió?) y explicativas (¿por qué ocurrió?). Las hipótesis factográficas son formuladas en la lectura de la información de la fuente y también son planteadas al realizar la crítica interna. Las hipótesis explicativas son las que explican los hechos y pueden llegar a establecer leyes (Ruiz Berrio, 1997).

2.4.- METODOLOGÍA.

Son varios los frentes que se pueden cubrir mediante el análisis de textos antiguos de matemáticas. Por una parte, extraer información sobre la difusión y evolución del saber en una determinada época. Otro punto de vista es aquel mediante el cual la revisión de antiguos libros de texto hace posible no solo conocer el contenido matemático mismo, sino que revelan los sistemas educativos imperantes en la época, el contexto cultural y social que subyace en estos escritos. Por tanto, los libros de texto incitan e invitan a un estudio del contexto social, del conocimiento escolar y del funcionamiento del sistema para la transmisión del conocimientos (Schubring, 1987).

También es manifiesta la importancia de tal estudio de textos, cuando lo que se pretende es interpretar fenómenos que tienen relación con los procesos de enseñanza-aprendizaje. Estos fenómenos pueden estar asociados, por ejemplo, con representaciones, concepciones o aplicaciones, entre otros.

Además de los dos objetivos anteriores es manifiesto un tercer objetivo, el cual es de significativa importancia para nuestra investigación. El carácter evolutivo del análisis histórico se convierte en un potente instrumento de evaluación mediante el cual validar o rechazar las conjeturas sometidas a estudio. De esta manera, la investigación teórica en Didáctica de la Matemática conlleva a postular la necesidad de ciertos constructos, para dar sentido a determinados fenómenos relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje, y permite establecer los posibles mecanismos de adecuación de la misma.

Para caracterizar el estudio que hemos llevado a cabo, y de esta forma realizar la clasificación de la modalidad de la investigación y situación con respecto a los paradigmas convencionales, utilizaremos la clasificación que propone Bisquerra (1989):

- Según el proceso formal, utilizamos el razonamiento hipotético-deductivo.
- Según el grado de abstracción, se trata de una investigación básica, ya que por el momento no pretende establecer aplicaciones prácticas que puedan deducirse del estudio.
- Según la naturaleza de los datos, es una investigación cualitativa, dado que todos los datos son filtrados por los criterios del investigador.
- Según la manipulación de las variables, es una investigación descriptiva. No se manipula ninguna variable.
- Según la dimensión cronológica, es una investigación histórica. Describe fenómenos que acontecieron en el pasado, las fuentes documentales de este estudio son libros de texto.
- Según los objetivos, se pretende describir y explicar la situación sometida a estudio.
- Según las fuentes, de una parte se trata de una investigación bibliográfica, pues hay una búsqueda, recopilación, organización, valoración y crítica sobre un concepto. A su vez se trata de una investigación metodológica, ya que presenta una cierta manera de integrar dos métodos descriptivos, para abordar una investigación histórica en educación sobre un tópico específico de matemáticas.
- Según la temporalización, se trata de una investigación longitudinal puesto que se abarcan diferentes períodos de la enseñanza de las matemáticas.

2.4.1.- Etapas de trabajo.

Las etapas que se han seguido para la realización de esta investigación, se corresponden fielmente con el tipo de investigación, es decir, con la metodología de la investigación histórica, considerando como método histórico el establecido por Tiana (1988) como “aplicación del proceso general del método científico a las peculiares características del estudio histórico desde la perspectiva epistemológica” por ello, se ha seguido el siguiente proceso:

1. **Planteamiento general de la investigación.** Inicialmente se seleccionó el campo de estudio, teniendo en cuenta para ello la relevancia social y científica del problema, puesto que se trata de una cuestión que han estudiado y estudian todos los alumnos de Bachillerato, y contribuirá, por lo tanto, al enriquecimiento de la Didáctica de la Matemática; su viabilidad en cuanto a la existencia de recursos documentales suficientes, la valoración de esos recursos y el tiempo disponible para su realización; la originalidad y cierto interés personal basado en la curiosidad y en la pasión por la investigación histórica. Esta parte de la investigación se ha resumido en el apartado anterior en el que se ha hecho una valoración del estado de la cuestión antes de empezar esta investigación.
2. **Definición del problema.** Durante esta fase se establecieron las preguntas a las que se pretendía dar respuesta, los objetivos que se pretendían cubrir mediante esta investigación y se establecieron las hipótesis como un intento de dar respuesta a las preguntas planteadas. Estas hipótesis constituyen el elemento clave de esta etapa pues con ellas se pretende dar una explicación a priori de los hechos, así como establecer una formulación de la leyes generales.
3. **Heurística.** Se trata de una etapa de búsqueda y recogida de los documentos que permitirán dar respuesta a los problemas planteados, para ello se determinaron cuáles iban a ser la fuentes, se procedió a un proceso de localización y por último se llevó a cabo la recolección de los datos. Además se determinó la crítica histórica estudiando la autenticidad (crítica externa) y fiabilidad (crítica interna) de las fuentes documentales. La autenticidad se ha comprobado mediante la determinación de la fecha, del lugar de origen y de la autoría de los documentos, la fiabilidad viene determinada por el hecho de haber utilizado como fuentes documentales los libros de texto.
4. **Análisis de la documentación.** Una vez localizadas y seleccionadas las fuentes, se procedió a realizar fichas bibliográficas para cada texto. A continuación se comenzó un análisis histórico y de contenido a partir de unas categorías de análisis previamente establecidas y que estaban relacionadas con tres puntos de interés: el autor/periodo de publicación de la obra, la estructura de la obra, las representaciones utilizadas en relación con los puntos críticos.

5. **Explicación y síntesis histórica.** Hemos tratado de dar una respuesta adecuada a las preguntas planteadas, procurando primeramente establecer una explicación genética en el sentido de señalar los sucesivos estadios de desarrollo de la evolución de las representación en la enseñanza de los puntos críticos, intentando responder a la pregunta de cómo ocurrió dicha evolución mediante la enumeración de la secuencia genética de diferentes sucesos. Posteriormente hemos intentado indicar las causas que han influido en dicha evolución tratando, por lo tanto, de dar respuesta a la pregunta acerca de por qué se produjo esa evolución. Finalmente se aporta una síntesis histórica de tipo genético, en el sentido de que se establecen las secuencias cronológica y causales acerca de la evolución en la enseñanza de los puntos críticos en la enseñanza secundaria.

En el siguiente gráfico se resumen las fases que caracterizan esta investigación, indicando las actividades que se han llevado a cabo a lo largo de ella:

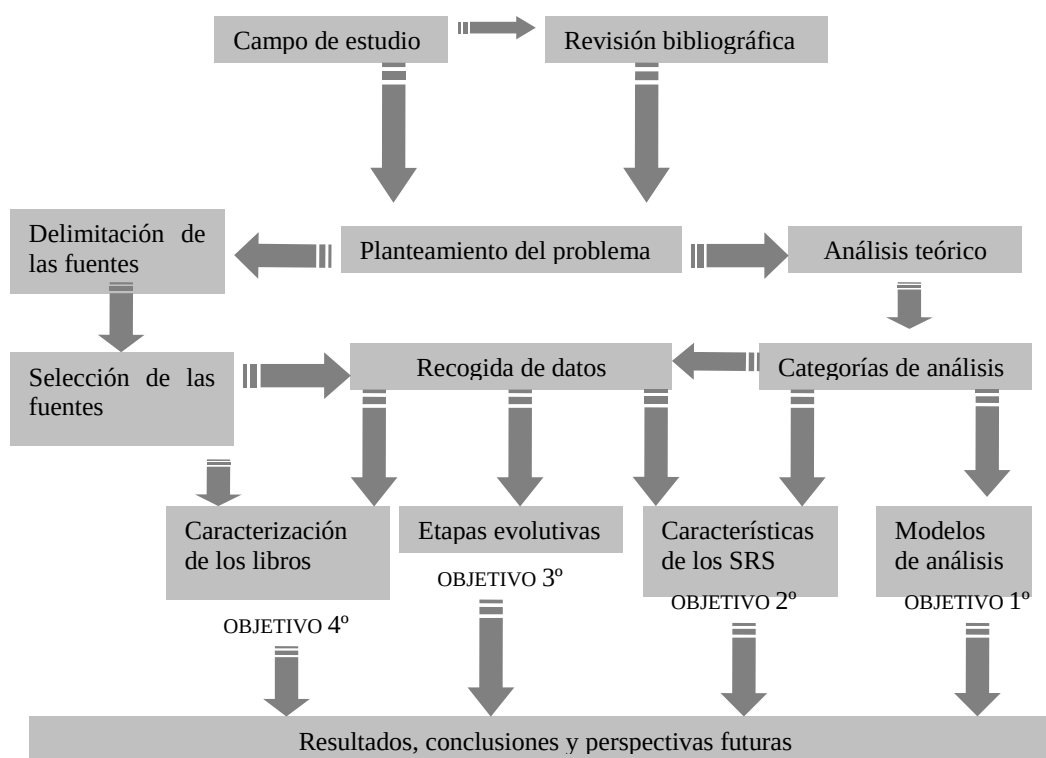


Fig. 2.1. Fases de la investigación

Dado que en el capítulo anterior hemos hecho la revisión documental así como el planteamiento general del problema y en el apartado anterior hemos delimitado el problema que vamos a estudiar, el resto del capítulo lo dedicaremos a establecer cómo se llevó a cabo la selección de las fuentes documentales, y cómo se ha realizado la recogida de datos procedentes de dichas fuentes.

2.4.2.- Selección de las fuentes.

El estudio de la evolución de las representaciones simbólicas en la enseñanza de los puntos críticos se ha llevado a cabo en tres ámbitos:

- Por una parte se han analizado libros de textos del Análisis Matemático según el esquema siguiente:
 - Libros históricos de texto que ciertos matemáticos relevantes han dedicado al Cálculo Diferencial. El análisis de estos libros nos ha permitido descubrir las primeras incorporaciones de los sistemas simbólicos de representación.
 - Libros de texto de la educación secundaria en España. Estos libros nos han permitido hacer el estudio de las transformaciones que han sufrido dichas representaciones al incorporarse a los textos propios de la educación secundaria durante el siglo XX.
- Dada la influencia que están empezando a tener las nuevas tecnologías, nos ha parecido interesante, realizar un estudio comparativo de las aportaciones que presentan las representaciones simbólicas, tanto del software educativo como de las calculadoras gráficas.

2.4.2.1.- Libros de texto históricos.

Partimos de la definición de fuentes históricas dada por Bernheim (citado por Tiana, 1988) para el que son los “resultados de la actividad humana que por su destino o su propia existencia u otras circunstancias, son particularmente adecuados para informar sobre los hechos históricos y para comprobarlos”. Las fuentes se clasifican en primarias, que son todos aquellos documentos elaborados por los participantes en los hechos, y que en nuestro caso serán los libros de texto originales, y fuentes secundarias, que son aquellas que introducen una cierta distancia entre el fenómeno y su registro como, por ejemplo, los libros de historia, las enciclopedias,... Inicialmente, partimos de estas fuentes secundarias para indagar acerca de los escritos realizados por los matemáticos en relación con el cálculo diferencial. Dichas fuentes fueron:

- Libros acerca de la historia de la matemática: Belhoste (1991), Boyer (1986), Cajori (1993), Dhombres y otros (1986), Dunham (1993), Dunham (2000), Duran (1996), Grattan-Guinness (1984), Hairer y Wanner (1996), Muñoz (1999), Tikhomirov (1986), Wussing (1998)
- Artículos en los que se trata la contribución de los matemáticos al cálculo diferencial: Cantoral (1995), Dhombres (1985), Schubring (1987).
- Libros universitarios actuales de cálculo diferencial: Apóstol (1981), Bradley y Smith (1998).

Teniendo en cuenta la reflexión de los dos apartados anteriores, y de acuerdo al problema de investigación y a los interrogantes planteados, a los objetivos definidos y las hipótesis establecidas, procedimos a realizar una primera búsqueda de fuentes documentales primarias.

A partir de la información obtenida, elaboramos un listado de todos los libros publicados y los escritos realizados asociándolos al autor y a la fecha de su publicación. Algunos de estos escritos fueron publicados con posterioridad al fallecimiento del autor, por lo que algunas fechas no coinciden. A continuación se presenta una tabla con dichos libros:

Autor (nacimiento-fallecimiento)	Título de la obra	Fecha de publicación	Referencia
G.F.A. L'Hôpital (1661-1704)	Analyse des infiniment petits	1696	40586
Pierre de Fermat (1601-1665)	Oeuvres de Fermat publiées par les soins de Paul Tannery et Charles Henry	1894	AZ/51 FER oeu
Brook Taylor (1685-1731)	Methodus incrementorum directa et inversa	1715	
George Berkeley (1685-1753)	The Analyst	1734	
Colin MacLaurin (1698-1746)	Treatise of Fluxions	1742	12932-33
Leonhard Euler (1707-1783)	Methodus inveniendi Lineas Curvas. Maximi minimive proprietata gaudentes ...	1744	IZ/517.9 EUL met
	Opera Omnia:		AZ/51 EUL ope
	Vol 8,9 Introductio in analysin infinitorum	1748	
	Vol 10 Institutiones calculi differentialis	1755	
Jean le Rond D'Alembert (1717-1783)	Encyclopedie o Dictionaire raisonné des sciences, des arts et des metiers	1751-1772	FV/I 14 DID enc
	Memoirs de la Academia de Berlin (problema de la cuerda vibrante)	1747	FV/DP/ Z O Enc did 40421-40453
Etienne Bezout (1730-1783)	Cours de mathematique (6 vols)	1764-1769	36820-36823
Benito Bails (1730-1797)	Principios de matemática	1797	39407-409
Joseph Louis Lagrange (1736-1813)	Theorie des fonctions analytiques	1797	40417
	Mécanique analytique	1965	AZ/531.3 LAG mec
	Oeuvres de Lagrange	1879	AZ/51 LAG oeu
Jean Antoine Marie Nicolas Caritat Condorcet (1743-1794)	Essai sur le calcul integral	1765	81531
Adrien Marie Legendre (1752-1833)	Exercices du calcul intégral	1811-1819	
	Traité des fonctions elliptiques et des integrales euleriennes	1825-1832	
Lazare N.M. Carnot (1753-1823)	Reflexions sur la metaphysique du calcul infinitesimal	1797	

Syvelstre Lacroix (1765-1843)	Traité elementaire de calcul differentiel et calcul integral	1837	61608-609
Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)	La theorie analytique de la chaleur	1822	
Bernhard Bolzano (1781-1848)	Rein analytischer Beweis Paradoxien des unendlichen	1817 1851	FV/B-7/16
August Cauchy (1789-1857)	Cour d'analyse de l'Ecole Polytechnique Resumé des leçons sur le calcul infinitesimal Leçons sur le calcul differentiel	1821 1823 1839	AZ/511 CAU oeu 76064?
Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859)	Mathematische Werke	1889-1897	AZ/51 DIR gle
Karl Weierstrass (1815-1897)	Mathematische Werke (Obras completas) I, II, III, IV Vorlesungen über the Theorie V Vorlesungen über the Theorie der Elliptischen funktionen VI Vorlesungen über anwendung der elliptischen funktionen VII Vorlesungen über variation rechnung	1895	AZ/51 WEI mat
Nicolas Bourbaki s. XIX	Variétés différentielles et analytiques Integration Funciones de una variable real Elements of mathematics	1971 1952 1949-1951 1968	AZ/517.6 BOU var Az/517.6 BOU int AZT/517.6 BOU fon AZ/510.2 BOU ele,
E. Heine (1821-1881)	Elemente Handbuk der Kugelfunction: Theorie und anwendungen	1872 1961	AZ/517.6 HEI ha
Bernhard Riemann (1826-1866)	Oeuvres mathématiques de Riemann	1968	AZ/51 RIE oeu
J. W. Richard Dedekind (1831-1916)	Stetigkeit und die Irrationalzahlen Was sind und was sollen die Zahlen	1872 1888	IZ/511 DED que
Charles Meray (1835-1911)	Nouveau précis d'analyse infinitesimale Leçons nouvelles sur l'analyse infinitesimale et ses applications	1872 1895	AZ/517 MER leç
Emile Borel (1871-1941)	Leçons sur les series divergentes Leçons sur la theorie des fonctions Leçons sur les fonctions de variables reelles et les developments en series de polynomes	1901 1950	61612 AZ/517.6 BOR leç AZ/517.6 BOR leç
Henri Lebesgue (1875-1941)	Leçons sur les series trigonometriques Leçons sur l'integration et la recherche des fonctions primitives Sur la mesure des grandeurs	1903 1904 1956	61458 61448 MT/51 LEB sur

Tabla 2.2 Libros históricos de Análisis Matemático.

Una vez localizadas las fuentes se procedió a realizar fichas bibliográficas respectivas para cada texto. Como indican Fox (1980), Cohen y Manion (1990) y Ruiz Berrio (1997), en toda investigación de corte histórico se debe realizar una crítica interna y una crítica externa.

El control de la crítica externa de esta investigación se llevó a cabo mediante la verificación de la autenticidad (ediciones originales) de los documentos y procediendo a confirmar la fecha de edición, procurando tener acceso a las más antiguas.

Para la crítica interna, se llevó a cabo el análisis elaborando una serie de parrillas que permitieran establecer lo que el autor plantea, realizando una ubicación de cada uno de los autores en su época, caracterizando cada uno de los textos, utilizando elementos de bibliometría e identificando los contenidos relacionados con el concepto a estudiar, tratando que tales parrillas permitan establecer criterios de relación; asimismo, se pretendió que la información así obtenida a través de fichas, campos y parrillas diseñadas sea lo más precisa y veraz posible. De esta manera hemos controlado tanto la crítica interna como la externa. Las categorías que hemos utilizado para el análisis se explicarán en el apartado siguiente.

A partir de la enumeración de los documentos de la tabla anterior, se han utilizado cuatro criterios para efectuar una primera selección de los textos de matemáticas para el estudio:

- Que estuvieran disponibles, así la muestra sería intencional y por conveniencia, por ello en la tabla se incluyen las referencias correspondientes a su ubicación en la Universidad de Salamanca.
- Que los textos cumplieren la función de libro de texto o fuese escritos con ese propósito.
- Que correspondieran a diferentes momentos de la enseñanza del Análisis Matemático para poder estudiar la evolución de dichos conceptos.
- Que los textos contuvieran los conceptos relativos a los puntos críticos.

La búsqueda tuvo como punto de partida la Biblioteca General de la Universidad de Salamanca, en particular sus fondos antiguos y, finalmente, los libros seleccionados para llevar a cabo el análisis de los datos fueron los siguientes, ordenados según el año de su publicación:

- L'Hôpital, G.F.A. (1696) *Análisis des infiniment petits*. París: L'Imprimerie Royale.
- MacLaurin, C. (1742) *Traité des fluxions*. París: Quai de Augustines.
- Euler, L. (1755) *Institutiones calculi differentialis*. San Petersburgo: Academia Imperialis Scientiarum.
- Bézout, E. (1764) *Cours de Mathematiques*. París: De l'Imprimerie de Ph- D. Pierres.
- Bails, B. (1797) *Principios de matemáticas*. Madrid: Imprenta de la viuda de Joaquín Ibarra

- Lagrange, J. L. (1797) *Theorie des fonctions analytiques*. París: L’Imprimerie de la Republique.
- Lacroix, S. (1837) *Traité elementaire de calcul différentiel et clacul intégral*. París: Gautier-Villars.

2.4.2.2.- Libros de texto de la enseñanza secundaria en España a partir del siglo XX.

Inicialmente hemos llevado a cabo una revisión de los planes de estudio de educación secundaria de España para establecer en qué momento empezó a incluirse el Análisis Matemático dentro del currículo. El término educación secundaria no se ha referido al mismo ciclo durante los diferentes planes establecidos en el siglo XX. Durante los dos primeros tercios del siglo, podemos decir que se consideraba como un ciclo que se inicia a los 10 años de edad y que se extendía hasta los 16, 17 o 18 años. Pero ha habido momentos, como durante la L.G.E., en los que no se iniciaba la educación secundaria hasta los 14 años, y actualmente se empieza a los 12 años. Estos estudios se han realizado como normal habitual, tras un examen de ingreso en institutos o centros similares y al finalizarlos se obtenía el título de bachiller imprescindible para poder acceder a la Universidad. Generalmente, los conceptos relativos al Análisis Matemático se posponían hasta los últimos años de dicho ciclo, es decir, que nos centraremos en el periodo que va desde los 16 a los 18 años de edad.

Para indagar en relación con la inclusión de estos conceptos, hemos utilizado como fuentes secundarias los libros: Utande (1964), García (1980), Cuesta (1985), Díaz de la Guardia (1988), Hormigón (1991), Hernández y otros (1994), Cobos (1995) y Vea (1995) que nos han permitido repasar la historia de la educación en España durante los siglos XIX y XX. Esto nos permitió establecer la introducción de la enseñanza del Análisis infinitesimal en España a partir del plan del año 1934, fecha que decidimos establecer como inicio para la posterior localización de los libros de texto correspondientes a los distintos planes.

Una vez realizada la revisión anterior, localizamos los planes de estudio en las gacetas y boletines correspondientes para establecer la fiabilidad de los datos obtenidos y para averiguar los conceptos de esta rama de las matemáticas, que se incluían como contenidos de dichos planes. Estas fueron, por tanto, nuestras fuentes primarias:

- Gaceta de Madrid de 21 de octubre de 1934 (Cuestionarios del plan de 1934)
- Boletín oficial de 10 de febrero de 1954. (Cuestionarios del plan de 1953)
- Boletín Oficial del Ministerio de Educación y Ciencia de 5 de octubre de 1967. (Cuestionarios del plan 1953)
- Boletín Oficial del Estado de 18 de abril de 1975 (Cuestionarios de Bachillerato del plan 1970)

- Boletín Oficial del Estado de 17 de marzo de 1978 (Cuestionario de C.O.U.)
- Boletín Oficial del Estado de 29 de enero de 1988 (C.O.U. nueva ordenación)
- Boletín Oficial del Estado de 21 de octubre de 1992. (currículo de Bachillerato L.O.G.S.E.)

Estos planes han sido agrupados, en lo que se refiere a las Matemáticas, en cuatro periodos, teniendo en cuenta las orientaciones de cada uno de ellos y la similitud entre algunos:

- La introducción de la enseñanza del Análisis Matemático: 1934-1967. En este periodo incluimos los planes de estudio correspondientes a los años 1934, 1938 y 1953.
- Introducción de la matemática moderna: 1967-1975. Siendo el plan de estudios correspondiente el de 1962
- Desarrollo del plan de estudios de B.U.P.: 1975-1990. En este periodo prevalece el plan de estudios de 1970
- Una nueva orientación de la enseñanza de las matemática bajo las orientaciones de la L.O.G.S.E.:1990-2001. Correspondiente al plan de estudios de 1990.

Cada uno de estos periodos posee unas características peculiares que lo diferencian del resto y los manuales que se van a escoger, se corresponderán con alguno de ellos. Por ello, una vez establecidos los contenidos de los diferentes planes de enseñanza, se inició la localización de los libros de texto correspondientes a cada uno de los periodos anteriores. La búsqueda se centró inicialmente en la Biblioteca de la Facultad de Educación de Salamanca y la Biblioteca Nacional de España. Posteriormente se completó con libros de la Biblioteca Municipal de Zamora, con libros de los profesores: Dr. Modesto Sierra Vázquez, D. Antonio Molpeceres Molpeceres y con los pertenecientes a mi biblioteca personal.

La selección de los libros de texto ha sido realizada, teniendo en cuenta los autores “más” famosos o las editoriales más sobresalientes en cada uno de los periodos. También se procuró que los autores elegidos tuvieran producción en los distintos periodos, para estudiar su evolución. Los libros correspondientes a cada uno de estos periodos fueron en un primer momento, los siguientes:

PERIODO	LIBROS
PRIMER PERIODO	• Baratech, B. y Royo Villanova (1938) Matemáticas. Séptimo curso de bachillerato. Primera parte. Análisis. Zaragoza: Librería General. • Carranza, E. (1972) Matemáticas. Sexto curso. Bachillerato. Plan 1957. Madrid: Summa • Fernández de Castro y Jiménez Jiménez (anterior a 1955) Matemáticas. Preparación del examen de estado. Cádiz: Escelicer. • Bruño (1968) Matemáticas 6º curso. Madrid: Bruño. • Sísxo Ríos y Rodríguez San Juan (1950) Matemáticas sexto curso de Bachillerato. Madrid: Los autores. • Sísxo Ríos y Rodríguez San Juan (1968) Matemáticas Sexto curso de Bachillerato. Madrid: Los autores. • Sísxo Ríos y Rodríguez San Juan (1968) Matemáticas Quinto curso de Bachillerato. Madrid: Los autores.
SEGUNDO PERIODO	• Abellanas y otros (1967) Matemática moderna. Quinto curso. Madrid: M.E.C. • Abellanas y otros (1969) Matemática moderna. Sexto curso. Madrid: M.E.C. • Sin autor (1972) Matemática sexto curso. Zaragoza: Edelvives. • Segura, S. (1974) Matemáticas 6º curso. Valencia: ECIR. • Tuduri, J. y Casal, R. (1974) COU Matemáticas especiales. Tarrasa: Vimsa • Marcos de Lanuza (1972) Matemáticas 5º curso. Madrid: G del Toro • Marcos de Lanuza, F. (1972) Matemáticas COU optativo. Madrid: G del Toro • Agustí, J. y Vila, A. (1973) Matemáticas 6º Bachillerato. Barcelona: Vicens-Vives. • Marcos, C. y Martínez, J. (1973) Matemáticas Generales COU. Valencia: SM
TERCER PERIODO	• Marcos de Lanuza, F. (1978) Matemáticas 2º BUP. Madrid: G del Toro. • Marcos de Lanuza, F. (1976) Matemáticas especiales. COU. Madrid: G del Toro • Agustí, J. y Vila, A. (1976) Matemáticas. Vectores 2º B.U.P. Barcelona: Vicens-Vives. • Etayo, J. y otros (1977) Matemáticas 2º de BUP. Salamanca: Anaya • Guillén, J. y otros (1976) Matemáticas 2º Bachillerato. Madrid: Magisterio. • Boadas, J. y otros (1977) Matemáticas 2º de Bachillerato. Barcelona: Teide • Anzola, M. Y otros (1976) Matemáticas 2º Bachillerato. Madrid: Santillana • Grupo Cero (1985) Matemáticas de Bachillerato. Barcelona: Teide. • Guzmán, M. Y Colera, J. (1988) Matemáticas. Bachillerato 3. Madrid: Anaya.
CUARTO PERIODO	• Lazcano, I. Barolo, P. (1993) Matemáticas 2º B.U.P. Madrid: Edelvives. • Álvarez, F. y otros (1992) Matemáticas. Factor 2. Barcelona: Vicens-Vives • Hernández, F. y otros (1989) Matemáticas 2º Bachillerato. Bruño: Madrid. • Colera J. y Guzmán, M. (1994) Bachillerato. Matemáticas 2. Madrid: Anaya. • Guzmán, J. y Colera, J. (1989) Matemáticas I C.O.U. Madrid: Anaya • Primo, A. y otros (1998) Matemáticas (Modalidad: Tecnología, Ciencias de la Naturaleza y de la Salud) Salamanca: Hespérides. • Vizmanos, R. y Anzola, M. (1998) Matemáticas 2 (Ciencias de la Naturaleza y de la salud-tecnología) Madrid: SM. • Biosca, A. y otros (1999) Matemáticas II. Barcelona: Edebé.

Tabla 2.3. Libros de texto utilizados en España en la Educación Secundaria.

Dada la magnitud de manuales encontrados, y teniendo en cuenta los resultados de investigaciones anteriores, realizadas por el grupo investigador al que pertenece la investigadora, hemos procurado realizar una selección adecuada entre estos libros, de forma que la pérdida de información en relación con la cantidad de libros sea mínima. En dichas investigaciones, establecimos que los libros anteriores se pueden clasificar, en cada uno de los periodos, en tres grupos según las orientaciones que dan a los conceptos del Análisis Matemático, por lo que hemos decidido elegir un libro de cada uno de dichos grupos que represente a los otros que son similares. Cada uno de dichos grupos viene caracterizado según que se sigan las orientaciones establecidas en el periodo anterior, que sean fieles a las orientaciones y normativas del periodo al que pertenece o que sean precursores de nuevos métodos y formas de entender la enseñanza de la matemática. En definitiva, los libros a los que finalmente se les ha realizado el análisis, clasificados según los periodos establecidos anteriormente, han sido:

- **Los inicios de la enseñanza del Análisis Matemático: 1934-1967.**

1. Baratech, B. y Royo Villanova (1938) *Matemáticas. Séptimo curso de bachillerato. Primera parte. Análisis*. Zaragoza: Librería General.
2. Fernández de Castro, M. Y Jiménez Jiménez, (anterior a 1955) *Matemáticas. Tercer, cuarto, quinto, sexto y séptimo. Preparación del examen de estado*. Cádiz: Escalicer.
3. Carranza, E. (1972) *Matemáticas. Sexto curso. Bachillerato. Plan 1957*. Madrid: Summa.

- **Introducción de la matemática moderna: 1967-1975.**

1. Sin autor (1972) *Matemáticas. Sexto curso*. Zaragoza: Luis Vives.
2. Abellanas, P. Y otros (1969) *Matemática moderna. Sexto curso*. Madrid: M.E.C.
3. Marcos, C. y Martínez, J. (1973) *Matemáticas especiales*. C.O.U. Madrid: SM.

- **Desarrollo del plan de estudios de B.U.P.: 1975-1990.**

1. Marcos de Lanuza, F. (1978) *Matemáticas 3º B.U.P.* Madrid: G del Toro.
2. Etayo, J. y otros (1977) *Matemáticas 3º B.U.P.* Salamanca: Anaya.
3. Grupo Cero (1982) *Matemáticas de Bachillerato , volumen 2*. Barcelona: Teide.
4. Guzmán y otro (1988) *Matemáticas. Bachillerato 3*. Madrid: Anaya.

- **Una nueva orientación de la enseñanza de las matemáticas bajo las orientaciones de la L.O.G.S.E.: 1995-2001.**

1. Primo, A. y otros (1998) *Matemáticas (Modalidad: Tecnología, Ciencias de la Naturaleza y de la Salud)* Salamanca: Hespérides.
2. Vizmanos, R. y Anzola, M. (1998) *Matemáticas 2 (Ciencias de la Naturaleza y de la salud-tecnología)* Madrid: SM.
3. Biosca, A. y otros (1999) *Matemáticas II*. Barcelona: Edebé.

2.4.2.3.- Las nuevas tecnologías en la enseñanza de los puntos críticos.

En cuanto a la introducción de las nuevas tecnologías, existen pocos materiales curriculares elaborados al respecto aunque si se han elaborado algunas propuestas interesantes en torno a la enseñanza de los puntos críticos. Presentamos por lo tanto estas posibilidades, aunque no hayan sido efectivamente utilizadas en el aula porque pensamos que constituirán, en el futuro, parte de la actividad que deba realizar el alumno para la adquisición de estos conceptos. Las fuentes que hemos utilizado para elaborar estas propuestas han consistido fundamentalmente en artículos de investigación así como algunos libros de Didáctica de la Matemática, que se pueden considerar precursores en cuanto a la introducción de estos nuevos medios en la enseñanza secundaria. A pesar de la búsqueda realizada, dichos documentos son bastantes escasos, en particular los que han sido consultados son los siguientes por orden cronológico de publicación:

- García, A. y otros (1995). *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Síntesis. Se realizan aportaciones en cuanto a ideas, material y criterios de utilización de las nuevas tecnologías de una forma novedosa para conseguir una mejor formación matemática adecuada a las necesidades de nuestros días y que sea mucho más atractiva tanto para profesores como para alumnos.
- Kindt, M. (1995) Problemas antiguos y la calculadora gráfica. *Uno*, 4 , pp. 41-52.
- Azcárate, C. y otros (1996) *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Síntesis. En este libro, se presenta una enseñanza constructivista de los conceptos del cálculo diferencial e integral que incluye además, la integración de las calculadoras gráficas y los ordenadores en el aula.
- Courtois, S. y Denis, F. (1996) Functions, extremums et CABRI II. *Mathématique et Pédagogie*. 108, pp. 55-69.
- Font, V. (2001) Expresiones simbólicas desde y para el aula. *EMA*, 6 (2), pp. 180-200.
- Camacho, M. y González, A. (2001) Una aproximación a los problemas de optimización en los libros de Bachillerato y su resolución con la TI-92. *Aula*, 10, pp. 137-152.

A partir de los documentos anteriores, hemos elaborado las diferentes posibilidades que creemos se pueden utilizar para trabajar en el aula en torno a los puntos críticos.

2.4.3.- Metodología de análisis.

Al tener esta investigación un carácter descriptivo y cualitativo, no se han definido variables independientes pero se han considerado los siguientes *puntos de interés* para poder llevar a cabo el análisis correspondiente y poder caracterizar, por tanto, los textos y materiales analizados.

- Ficha de referencia del libro de texto.
- Contextualización de la obra e intencionalidad del autor.
- Estructura del material.
- Representaciones utilizadas.
- Perfil de los libros de texto de educación secundaria.
- Conclusiones.

Con el propósito de realizar un trabajo sistemático, se han definido unos *campos* que permiten organizar la información obtenida, correspondientes a cada uno de los elementos enumerados anteriormente.

La ficha de referencia del libro de texto analizado incluye el **autor**, **año de nacimiento** y **fallecimiento**, **título** de la obra; año de **la primera edición**, indicando la editorial y lugar de edición; año de la **edición consultada**, indicando asimismo editorial y el lugar de edición, y **localización** del manual consultado.

Los dos elementos siguientes nos dan una visión general de la obra o del material utilizado. La contextualización de la obra e intencionalidad del autor nos informa en primer lugar acerca del momento histórico en el que fue escrito el libro o desarrolladas las nuevas tecnologías, las circunstancias que hicieron que fuera escrito en el modo en que ha llegado a nosotros o, en el caso de los ordenadores, la influencia del desarrollo social en la incorporación de estos medios a la enseñanza, las repercusiones que han tenido en el mundo educativo y científico del momento; pero también nos proporciona información acerca de cuáles son los objetivos que se pretenden, la forma de ver el Análisis Matemático, las innovaciones que se introdujeron a partir de la obra o el instrumento didáctico, la metodología de demostración usada, así como otras obras escritas en esta rama de las matemáticas. En los libros de texto del siglo XX y en las actividades realizadas con ordenadores, se relacionan con los planes oficiales elaborados por el correspondiente Ministerio de Educación, y se compara con los programas y las orientaciones establecidas en relación con dichos planes. La caracterización de la estructura del material se ha

realizado indicando la extensión, la secuenciación de los contenidos y nociones de los capítulos y las características relativas a la impresión o la presentación.

Los dos apartados siguientes se centran en el tema de la tesis. Por un lado realizamos el estudio de los diferentes tipos de sistemas simbólicos de representación utilizados específicamente en cada obra. Para ello se han seleccionado unidades de información correspondientes a cada uno de los tipos de sistemas simbólicos de representación que se utilizan en Análisis Matemático: **descripciones** (teóricas y aplicaciones), **tablas o diagramas, gráficos** y, por último, **expresiones simbólicas**. En cuanto al perfil de los libros de texto, hemos considerado adecuado clasificarlos según las representaciones usadas, obteniendo tres *tipos de libros*: **expositivo, tecnológico, comprensivo**. Aunque ninguno de los libros se puede considerar encuadrado exclusivamente en uno de estos tipos, si creemos que se puede verificar cierta tendencia hacia uno de ellos. Para poder clasificar los libros según los tipos anteriores se han considerado diversas *dimensiones* clasificadas en cuatro *categorías*: sintáctica, semántica, pragmático-didáctica y socio-cultural.

Por último para elaborar las conclusiones se ha considerado necesario, en función de los objetivos de este trabajo de tesis, considerar tres aspectos: el **socio-cultural** que nos indicará la visión relativa al Análisis Matemático así como de la aplicabilidad de los conceptos, el **epistemológico** referente al status que se refleja en el material de los distintos contenidos desarrollados y, por último, el aspecto **didáctico** en el que se resaltarán aspectos relacionados con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y en particular del Análisis Matemático.

A continuación se detallan cada uno de los puntos de interés junto con los campos, categorías y dimensiones que se han considerado en cada uno de ellos, así como las relaciones que se han originado.

2.4.3.1. Ficha de referencia de la obra.

En este apartado se pretende hacer una primera identificación de la obra que se va a analizar mediante algunos *campos* usuales, utilizados cuando se trabaja con libros:

Nombre del autor: Se indica el nombre completo del autor.

Fechas de nacimiento y fallecimiento del autor: Se sitúa temporalmente el periodo de vida del autor indicando cuándo nació y cuándo murió.

Primera edición: Se incluye el año, la editorial y el lugar de la primera edición del texto para poder situarla correctamente en el momento en el que apareció.

Edición analizada: Se indican el año, la editorial y el lugar de la edición del texto que se ha analizado por las posibles diferencias que tuviera respecto del texto original.

Localización del manual utilizado: Ubicamos el libro por la procedencia, distinguiendo y expresando si es un manual de una biblioteca pública o privada.

La función de esta ficha es meramente identificativa de la obra, sin que se use por lo tanto para realizar ningún tipo de análisis. Nos permite encuadrar la obra en el momento y lugar en que fue escrita.

2.4.3.2.- Contextualización e intencionalidad del autor.

Los diferentes *campos* considerados en torno a este apartado, nos van a dar una información general del texto o material, contextualizándolo para poder analizarlo correctamente en función de las circunstancias que rodearon su publicación o incorporación a la enseñanza. Uno de los elementos claves que habrá que tener en cuenta, será referente a las intenciones u objetivos que pretendía o pretende alcanzar el autor, que suele estar recogido en el prólogo o introducción de la obra, resaltaremos en torno a este tema aquellos aspectos que consideremos más característicos e innovadores respecto de otros textos o materiales de similares características. Los *campos* utilizados han sido:

CIA1: Momento histórico y lugar en que fue escrita la obra o distribuido el material: Ubicación de la obra respecto del momento histórico o más bien científico que se produjo su nacimiento.

CIA2: Formación del autor: Se hace una breve reseña del autor, indicando su itinerario profesional e influencias que recibió de otros matemáticos del momento.

CIA3: Objetivo(s) general(es) del material: Se indican los objetivos, intenciones o deseos del autor, así como algunas opiniones contrastadas que han ofrecido algunos investigadores de reconocido prestigio en relación con este apartado.

CIA4: Innovaciones introducidas por el material: Se pretende indicar qué aspectos de la obra fueron innovadores en su momento e incluso cuáles fueron rechazados, las influencias que ejerció en matemáticos de su época, posteriores e, incluso, cuáles se conservan actualmente en el currículo de Bachillerato.

CIA5: Otras obras publicadas: Mención de las obras más importantes publicadas por el autor.

CIA6: Adecuación a los programas oficiales: Se hará constar si el libro es producto del periodo en el que fue escrito, si continúa la forma de hacer matemáticas del periodo anterior o, por el contrario, si resulta especialmente novedoso para la época.

Por las diferentes características que poseen los libros históricos de texto, frente a los libros actuales, y fundamentalmente, por acortar la distancia que nos separa de aquéllos, en los primeros haremos especial énfasis en los *campos* CIA1, CIA2, CIA3, CIA4 y CIA5, mientras que en los segundos solamente aplicaremos CIA1, CIA3, CIA4, CIA6 de una forma muy sucinta. En cuanto a las nuevas tecnologías utilizaremos los campos CIA1, CIA3, CIA4, CIA6.

2.4.3.3.- Caracterización de la estructura del material.

Con este bloque se pretende dar una visión general de la estructura de cada obra o material analizado, lo cual permitirá identificar peculiaridades o variaciones en la presentación de los contenidos matemáticos con el paso de los años. Los *campos* que hemos utilizado han sido los siguientes:

CEM1: Extensión y estructura del material: Se indica el número de páginas de la obra, la forma en que está dividido el texto en introducción, prólogo, capítulos, notas, apéndices, ..., pantallas, menús,...

CEM2: Secuenciación de los contenidos de la obra: Se explica la distribución de los contenidos de Análisis Matemático a lo largo del texto, indicando los conceptos que aparecen en cada uno de los apartados.

CEM3: Identificación de los contenidos: Se hace un pequeño resumen del tratamiento que tienen los conceptos en la obra para resaltar las contribuciones más importantes.

CEM4: Características de la impresión o de la presentación: Elementos de la impresión característicos e indicativos de la estructura de la obra como los relativos a la identificación de capítulos y apartados, la señalización y numeración de definiciones, teoremas, demostraciones y problemas, la distinción de las nociones,... En relación con las nuevas tecnologías se incluyen las características diferenciadoras respecto de los libros de texto.

Al igual que hemos hecho constar en el apartado anterior, estos *campos* están especialmente pensados para aplicarlos a los libros de texto históricos, mientras que entre los actuales las diferencias no son tan llamativas, por lo que sólo se utilizarán cuando sea necesario. Para analizar las nuevas tecnologías tendremos en cuenta los campos CEM1, CEM2, CEM4.

2.4.3.4.- *Sistemas simbólicos de representaciones utilizados.*

En este apartado se pretende sistematizar la información concerniente a las diferentes representaciones utilizadas y al uso que se hace de ellas. Se hace de una forma netamente descriptiva de forma que, para cada una de las unidades de información seleccionadas, se irán exponiendo sus características más sobresalientes. Distinguiremos, como se ha señalado anteriormente, cuatro tipos de categorías para dicho análisis: las sintácticas (SI), las semánticas (SE), las pragmático-didácticas (PD), y las socio-culturales (SC), esto nos permitirá apreciar los aspectos en los que se ha hecho más énfasis, los cambios más significativos respecto a autores y épocas, las técnicas que se han considerado adecuadas para la enseñanza de los contenidos,... Las unidades de información, se han clasificado, para hacer más ligera la exposición del trabajo, según los distintos tipos sistemas simbólicos de representación, distinguiendo entre descripciones (d), tablas o diagramas (t), gráficas (g) y expresiones simbólicas (e), se han numerado consecutivamente según su aparición en la exposición del periodo correspondiente y para cada uno de ellos se han considerado distintos apartados. Así, en relación con las descripciones, hemos distinguido:

- **Definiciones**¹. En este apartado se incluyen todas las descripciones relativas a los puntos críticos, en las que se caracterizan desde un punto de vista matemático teórico.
- **Descripciones de procesos o reglas**. Son descripciones relativas a los procedimientos necesarios para el cálculos de los puntos críticos.
- **Teoremas**. Se trata de enunciados en los que, a partir de ciertas condiciones, se establece un resultado.
- **Descripción de situaciones cotidianas**. Son problemas realistas, en los que bajo un contexto falsamente cotidiano, se propone una situación relacionada con los puntos críticos.
- **Fenómenos físicos**. En este tipo de descripciones se incluyen conceptos pertenecientes a la Física como la velocidad, la fuerza, la intensidad luminosa,...
- **Contextos económicos**. Se trata de situaciones en las que fundamentalmente hay que maximizar beneficios o minimizar costes.
- **Recorridos mínimos**. Son situaciones en las que se requiere buscar una trayectoria que se pueda recorrer en la menor cantidad de tiempo.
- **Descripciones de fenómenos matemáticos**. Se trata de situaciones que o bien introducen un concepto matemático específico o bien describen su comportamiento y pueden ser aritméticos, geométricos euclídeos, geométricos cartesianos, estadísticos
- **Descripciones gráficas**. Se refiere a la descripción de las características de una representación gráfica como pueden ser enumeración de los puntos críticos, intervalos de crecimiento, ...

¹ Las definiciones son declaraciones que los matemáticos formales desearían considerar como los únicos generadores del discurso completo que involucra al significante que define. Los matemáticos consideran legítimas sólo aquellas declaraciones que son presentadas como aquellas deducciones que se derivan de las definiciones o que al menos se muestran consistentes con esas definiciones, es decir, la definición del significante *S* regula el discurso completo de *S* como piedra de choque con la que se comprueba la admisibilidad de cualquier enunciado sobre *S*.

Las definiciones como tales introducen nuevos signos de forma esquelética con casi ningún vínculo con los discursos previos, en realidad eliminar dichos vínculos es la verdadera esencia de la abstracción y la formalización. Según Bruner (1987) las definiciones son “todo referencia y nada de sentido”, por lo que no se pueden considerar como abreviaturas del significado, es el contraste entre “significado contextual” y las definiciones que contienen “significado potencial” (Sfard, 1999, pp. 75-76 *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms*).

En cuanto a las tablas tenemos:

- **Tablas de valores de una función.** En estas tablas se da un conjunto discreto de valores de la variable independiente y los correspondientes de la variable dependiente.
- **Tablas de descripción local.** Algunas características de una determinada función o una familia de funciones se pueden destacar mediante tablas diseñadas ex profeso. Las características que se resaltan son las relativas al crecimiento o decrecimiento de una función, su convexidad, puntos notables,... Se señalan dichas propiedades asignándolas a ciertos puntos o intervalos mediante los términos específicos que las expresan o mediante abreviaturas de dichos términos.
- **Cuadros variacionales.** En estos cuadros, la variación de la función se expresa fundamentalmente mediante la utilización de ciertos iconos expresivos como flechas, arcos, cruces,...

Las gráficas son representaciones características del Análisis Matemático y su estudio se ha realizado teniendo en cuenta:

- **Ábaco:** Se utilizan para calcular algunos valores, puntos notables o intervalos característicos de las funciones.
- **Mensaje topológico local:** Cuando se analiza gráficamente alguna propiedad local de las funciones.
- **Ideograma:** Para ejemplificar algún concepto o procedimiento matemático mediante ciertas posiciones en el plano.

Las expresiones simbólicas son muy usuales en los manuales de matemáticas y por razones de tipo histórico se han distinguido como:

- **Expresiones algebraicas polinómicas.** Son expresiones caracterizadas por la suma de varios monomios formados a partir de ciertas potencias de la variable junto con el producto por números.
- **Expresiones algebraicas polinómicas factorizadas.** Productos de expresiones algebraicas polinómicas.
- **Expresiones algebraicas racionales.** Expresiones formadas a partir del cociente de expresiones algebraicas polinómicas o factorizadas.
- **Expresiones algebraicas irracionales.** Expresiones en las que intervienen radicales.
- **Expresiones trascendentes exponenciales.** Se incluyen operaciones con el número e.

- **Expresiones trascendentes logarítmicas.** Existen logaritmos en la expresión.
- **Expresiones trascendentes trigonométricas.** Formadas a partir de las funciones circulares.
- **Expresiones de funciones especiales.** Como valor absoluto, parte entera de x ,...
- **Expresiones de funciones definidas a trozos.** Diferentes expresiones para distintos intervalos de la recta real.

2.4.3.5. Perfil.

En relación con este apartado, hemos intentado caracterizar cada uno de los libros de texto del siglo XX analizados, elaborando un perfil según diferentes *dimensiones* relacionadas con las cuatro *categorías*: sintáctica, semántica, pragmático-didáctica y socio-cultural. Esto nos permitirá clasificarlos y elaborar un modelo de evaluación de materiales curriculares. Los tres tipos en los que se han clasificado los libros, han sido los siguientes:

- **Expositivo (E).** Son libros en los que se considera el conocimiento matemático como una acumulación de enunciados, reglas y procedimientos aislados, y relativamente inconexos y desconectados de la realidad, pero que poseen una estructura matemática. Este tipo de libros inducen a un aprendizaje de tipo memorístico, en los que importa más la estructura matemática que la comprensión de los conceptos, a pesar del énfasis que se pone en las definiciones y teoremas. La estructura que poseen es la típicamente deductiva, en la que partiendo de las definiciones de los conceptos, se deducen los teoremas y se exponen algunos pocos ejemplos, con lo que es una estructura ciertamente prescriptiva. Esta estructura implica, en cuanto a la enseñanza, que los objetivos son conceptuales, incitándose la exposición magistral y la ejercitación repetitiva.
- **Tecnológico (T).** Se conciben las matemáticas como una organización lógica de enunciados, reglas y procedimientos que se emplean como técnicas o destrezas para pensar sobre y aplicar los conceptos a diversas situaciones. Aunque los procedimientos y conceptos están organizados y estructurados de una forma lógica, se hace más énfasis en la memorización de reglas y la aplicación en ejercicios y problemas, proponiéndose para ello numerosas aplicaciones con la intención de dotar de sentido a dichas reglas. Aun así las distintas ramas de las matemáticas aparecen totalmente desconectadas. A partir de objetivos terminales u operativos y por medio de una estructura secuencial, se intenta una ejercitación productiva.
- **Comprensivos (C).** Se concibe que el aprendizaje de las matemáticas se adquiere mediante el establecimiento de una red de relaciones con otros contenidos que pueden ser matemáticos o no, dando así sentido a las matemáticas. Se considera que los conceptos se adquieren a través de la experimentación, partiendo para ello de situaciones propias de la realidad que permiten la construcción de los

conceptos y reglas. En este caso se parte de objetivos flexibles, de forma que para conseguirlos se requiere la experimentación y por lo que el tipo de enseñanza adecuada es la realizada por descubrimiento, permitiendo la construcción de redes conceptuales.

A continuación enumeramos las dimensiones que se han tenido en cuenta en relación con cada una de las categorías (sintáctica, semántica, pragmático-didáctica y socio-cultural), estableciendo para cada uno de estas dimensiones las tres versiones diferentes que se pueden observar según que correspondan a una orientación expositiva (E), tecnológica (T) o comprensiva (C), correspondientes a cada uno de los tres tipos de libros que se han descrito anteriormente. Las dimensiones son las siguientes:

SINTAXIS

Dimensión 1: Estructura del problema

E1: Problemas clásicos en el sentido de que, a partir de un enunciado, se establece todo un conjunto de soluciones agrupadas por una característica común. Se trata de problemas de tipo teórico cuya estructura es de la forma: Calcula

T1: Problemas de aplicación en los que a partir de un enunciado con datos numéricos, se hace una pregunta acerca de la solución.

C1: Son problemas en los que se incluye una explicación a modo de justificación del sentido del problema en relación con el concepto que se está estudiando.

Dimensión 2: Descripciones teóricas.

E2: Descripciones formales con algún elemento intuitivo.

T2: Descripciones teóricas con símbolos lógico-matemáticos.

C2: Descripciones explicativas.

Dimensión 3: Símbolos utilizados en las tablas.

E3: No se incluyen tablas.

T3: En las tablas se incluyen símbolos exclusivamente matemáticos.

C3: Se introducen en las tablas iconos como flechas, arcos,...

Dimensión 4: Símbolos utilizados en las gráficas.

E4: Gráficas generales en las que los datos se incluyen en forma literal.

T4: En las gráficas se incluyen símbolos numéricos.

C4: No hay ningún símbolo además de la propia gráfica.

Dimensión 5: Tipos de expresiones simbólicas.

E5: Las expresiones simbólicas se refieren a familias de funciones.

T5: Expresiones simbólicas específicas.

C5: Expresiones simbólicas no habituales.

SEMÁNTICA

Dimensión 6: Fenomenología.

E6: Problemas matemáticos.

T6: Problemas realistas.

C6: Problemas sacados de la realidad.

Dimensión 7: Tipos de descripciones

E7: Descripciones de los conceptos como una propiedad de las funciones.

T7: Descripciones en las que se enfatiza su aplicación: reglas ($f(x) > f(x_0)$ o $f'(x) = 0$)

C7: Descripciones como propiedades de las curvas.

Dimensión 8: Tipos de tablas.

E8: Ausencia de tablas.

T8: Cuadros variacionales en los que se enfatizan las relaciones o conexiones.

C8: Tablas de descripción local.

Dimensión 9: Tipos de gráficas.

E9: Mensajes topológicos.

T9: Ábacos

C9: Gráficas como ideogramas.

Dimensión 10: Significado de las expresiones simbólicas

E10: Expresiones simbólicas como objetos manipulables.

T10: Expresiones simbólicas como iconos.

C10: Funciones en las que se refleja un proceso variacional.

PRAGMÁTICO-DIDÁCTICA

Dimensión 11: Función de los ejercicios.

E11: Ejercicios resueltos de aplicación de conceptos sin gráficos.

T11: Ejercicios propuestos de aplicación de reglas o ejercicios con apoyos gráficos o fórmulas.

C11: Problemas para la construcción de conceptos y reglas o con gráficos explicativos.

Dimensión 12: Papel de las definiciones.

E12: Descripciones para la construcción de la teoría formuladas a priori.

T12: Desarrollo reglas algorítmicas para la aplicación a problemas y ejercicios: énfasis técnicos.

C12: Interpretación de las reglas a partir de los fenómenos estudiados, estableciendo las definiciones a posteriori.

Dimensión 13: Actividades relacionadas con las tablas.

E13: Ausencia de tablas

T13: Tablas construidas a partir de una expresión simbólica.

C13: Tablas para completar relacionadas en ambas direcciones con otras representaciones tanto para su construcción como para su interpretación.

Dimensión 14: Actividades gráficas.

E14: Clasificación de conceptos.

T14: Construcción de gráficas.

C14: Visualización de propiedades.

Dimensión 15: Papel de las expresiones simbólicas.

E15: Expresiones simbólicas utilizadas como ejemplos de los conceptos.

T15: Expresiones simbólicas para la aplicación de las reglas.

C15: Expresiones simbólicas que permitan establecer relaciones con otras formas de representación.

SOCIO-CULTURAL

Dimensión 16: Influencia social y adaptación al currículum.

E16: Sin contexto.

T16: Utilización de contextos atemporales.

C16: Contextos con referencias a la época en que fue escrito el libro.

Dimensión 17: Influencias didácticas

E17: Definiciones que mantienen la estructura de los libros históricos.

T17: Definiciones adaptadas a los planes de estudio y las orientaciones oficiales.

C17: Definiciones influenciadas por novedosas corrientes didácticas.

Dimensión 18: Aplicación de las tablas.

E18: Ausencia de tablas.

T18: Tablas como elemento auxiliar.

C18: Tablas con categoría como cualquier otra representación.

Dimensión 19: Presentación de las gráficas

E19: Gráficas cartesianas sin añadidos.

T19: Gráficas con algún elemento característico del periodo (intervalos,...).

C19: Utilización de gráficas con elementos escolares (cuadrículas, pantallas,...).

Dimensión 20: Complejidad de las expresiones simbólicas.

E20: Expresiones simbólicas clásicas representativas de ciertas curvas geométricas como la circunferencia, cicloide, ...

T20: Expresiones simbólicas escogidas porque su estructura es adecuada como aplicación didáctica de las reglas establecidas previamente.

C20: Expresiones muy variadas y complejas que puedan estar relacionadas con fenómenos reales y requieran el uso de las nuevas tecnologías.

En el siguiente cuadro presentamos de manera sintética las categorías y dimensiones relacionadas con cada tipo de texto. La lectura horizontal permite comparar las diferentes tendencias en relación con los textos y mostrar una posible evolución que siguen los libros y materiales curriculares. La lectura vertical permite repasar las diferentes dimensiones que se han tenido en cuenta para tener una visión global del análisis realizado.

CATEGORÍAS		DIMENSIONES	EXPOSITIVO	TECNOLÓGICO	COMPENSIVO
SINTAXIS	1	Estructura del problema	Clásica	Aplicación	Explicación
	2	Descripciones teóricas	Formales	Formales-intuitivas	Intuitivas
	3	Símbolos utilizados en las tablas	Sin tablas	Con símbolos matemáticos	Con iconos
	4	Símbolos utilizados en las gráficas	Literal	Utilización de números	Elementos explicativos
	5	Tipos de expresiones simbólicas	Familias	Específicas	Variadas
SEMÁNTICA	6	Fenomenología	Matemáticas	Realistas	Reales
	7	Tipos de descripciones	De conceptos	De reglas	De relaciones
	8	Tipos de tablas	Sin tablas	Descripción local	Cuadros de variación
	9	Tipos de gráficas	Ideogramas	Ábacos	Mensajes topológicos
	10	Significado de las expresiones simbólicas	Objeto	Regla	Proceso
PRAGMÁTICO DIDÁCTICA	11	Función de los ejercicios	Rutinarios	Aplicación	Deducción
	12	Papel de las definiciones	Estructurales-teóricas	Aplicación a problemas	Interpretación
	13	Actividades relacionadas con las tablas	Sin tablas	Construcción	Interpretación/Construcción
	14	Actividades gráficas	Visualización	Construcción	Interpretación/Construcción
	15	Papel de las expresiones simbólicas	Ejemplificación	Escolar	Social
SOCIO CULTURAL	16	Influencia social y adaptación al currículum	No hay	Contexto intemporal	Contexto actual
	17	Influencias didácticas	Clásica	Adaptada al currículum	Novedosa
	18	Aplicación de las tablas	Sin tablas	Elemento auxiliar	Categoría de objeto
	19	Presentación de las gráficas (estática/dinámica)	Descontextualizadas	Impresa	Nuevas tecnologías
	20	Complejidad de las expresiones simbólicas.	Clásicas	Sencillas	Complejas

Tabla 2.3 Categorías y dimensiones consideradas en relación con las representaciones en los libros de texto de educación secundaria en España.

De los libros de texto analizados, se extraerán las correspondientes unidades de información referentes a cada uno de los sistemas simbólicos de representación que serán caracterizadas por los códigos de cada una de las dimensiones anteriores y que hacen referencia a alguno de los tríos descritos en cada dimensión. Las características se representarán tabularmente mediante asteriscos que se colocarán en una o varias casillas, según que corresponda a un perfil expositivo, tecnológico o comprensivo. Para una misma dimensión puede haber varios asteriscos, en el caso de que haya unidades de información que correspondan a varios perfiles y la diferencia en la cantidad de las unidades correspondiente a cada uno de ellos sea pequeña. Se constituirá de esta forma el perfil de cada uno de dichos libros, siendo la estructura de cada perfil la siguiente:

CATEGORÍAS	DIMENSIONES	Expositivo	Tecnológico	Comprensivo
Sintaxis	Estructura del problema			
	Descripciones teóricas			
	Símbolos utilizados en las tablas			
	Símbolos utilizados en las gráficas			
	Tipos de expresiones simbólicas			
Semántica	Fenomenología			
	Tipos de descripciones			
	Tipos de tablas			
	Tipos de gráficas			
	Tipos de expresiones simbólicas			
Pragmático-didáctica	Función de los ejercicios			
	Papel de las definiciones			
	Actividades relacionadas con las tablas			
	Actividades gráficas			
	Papel de las expresiones simbólicas			
Socio-cultural	Influencia social y adaptación al currículum			
	Influencias didácticas			
	Aplicación de las tablas			
	Presentación de las gráficas			
	Complejidad de las expresiones simbólicas			

Cuadro 2.4. Esquema para la construcción de perfiles de libros de texto

El perfil se hará para cada uno de los libros de forma que así podremos compararlos.

2.4.3.6. Conclusiones.

Las conclusiones se establecerán para cada libro histórico, cada periodo de la enseñanza secundaria en España y para la introducción de las nuevas tecnologías en la enseñanza del Análisis Matemático, a partir de un análisis que se realizará en tres vertientes:

Análisis socio-cultural. Inicialmente se encuadrará el material que se ha analizado teniendo en cuenta los *campos* siguientes según corresponda: el **momento y lugar** en que fue escrito CIA1, la **formación del autor** CIA2, **otras obras publicadas** CIA5, la **adecuación a los programas oficiales** CIA6, **estructura** de la obra o del material CEM1,

y los **tipos de aplicaciones** (d) que se estudian, aparecerá entonces claramente si se tratan descripciones de procesos de otras ciencias, si sólo aparecen procesos puramente matemáticos o si intervienen aspectos temporales. Esto nos indicará el tipo de texto que es, a qué nivel educativo está dirigido y cuál es su fin principal o qué tipo de preparación se pretende conseguir.

Análisis epistemológico. Se trata de establecer el status que se poseen el Análisis Matemático y el Cálculo Diferencial, incluyendo las concepciones acerca de las principales nociones que forman parte de dicha rama de las matemáticas. Será importante, por lo tanto, la **formación recibida por el autor** CIA1, las **innovaciones** introducidas por la obra o el material CIA4, la **identificación de los contenidos** CEM3, las **definiciones** (d) de los conceptos del Análisis y **expresiones simbólicas** (e) utilizadas para representar las funciones, fijándonos en si son expresiones implícitas, explícitas o desarrollos en serie. De esta forma averiguaremos si la visión del Análisis Matemático que se ofrece es de tipo geométrico, algebraico, aritmético o gráfico², qué tipo de concepción se tiene del concepto de función: si se considera asociada a curvas geométricas, si se manipula como si fuera un objeto o si se considera una regla de asociación de valores, qué se entiende por variación y cómo se calcula.

Análisis didáctico. Se realiza un análisis didáctico, en función de los objetivos de la obra y la utilización que se hace de las representaciones matemáticas para la enseñanza y el aprendizaje del Análisis Matemático. Serán esenciales, por lo tanto, los campos relativos a los **objetivos generales** del material CIA3 para saber cuáles son los fines didácticos que se quieren conseguir, la **secuenciación de los contenidos** CEM2 que nos dará información de la estructura que tiene el material; si está enfocado a las aplicaciones, hacia la construcción de un cuerpo de conocimientos o a la clasificación y estudio de los puntos críticos, las **características de la impresión** o del instrumento utilizado CEM4 que será un indicador de las herramientas didácticas utilizadas, las **descripciones teóricas** (d) que nos dará información acerca de si los puntos críticos son considerados desde un puntos de vista geométrico (la tangente es horizontal), algebraico (la derivada en ese punto es cero) o aritmético (un determinado valor en relación con los demás), las **gráficas** (g) y **tablas** (t) usadas con referencia al papel que cumplen en cuanto a la enseñanza de los conceptos relativos a los puntos críticos.

Una vez elaborados estos tres tipos de análisis, las conclusiones especificarán los diferentes periodos o etapas en relación con la enseñanza del Análisis Matemático, identificando las características asociadas a cada una de ellas.

² Se considera que la concepción del Análisis es geométrica si se centra en el estudio de las curvas clásicas consideradas tanto como secciones de cuerpos como la traza de un punto que se mueve, es algebraica si la funciones se consideran como objetos con los que se establecen operaciones que verifican ciertas propiedades, se considera que es aritmética si trata de la asociación de determinados valores en función de otros y se considera gráfica si se centra en el estudio de las gráficas de las funciones manejando estas gráficas como si de objetos matemáticos se tratara.

2.4.3.7.- Esquema y procedimiento para realizar el análisis.

En los siguientes capítulos se describe el estudio realizado, teniendo en cuenta que primeramente se incluye el relacionado con los libros históricos de texto, en segundo lugar el de los libros de enseñanza secundaria en España y en tercer lugar el de las nuevas tecnologías. En cada uno de los capítulos se procederá del siguiente modo:

Ficha de referencia de la obra. Se realizará una breve identificación de cada obra de acuerdo con los campos considerados anteriormente. Sólo se hará para los libros de texto, mientras que para los programas informáticos y las calculadoras gráficas se hará una breve descripción de las herramientas disponibles.

Contextualización e intencionalidad del autor. En esta parte se incluye información relativa a los campos CIAn.

Caracterización de la estructura del material. En esta parte se incluyen los campos que se refieren a la información obtenida en los campos CEMn.

Representaciones. En esta parte se copian textualmente las representaciones que aparecen en los manuales seleccionados y se clasifican por el tipo de representación utilizada. Así tendremos los apartados correspondientes a: definiciones (d), tablas (t), gráficas (g) y, por último, las expresiones simbólicas.

Perfil. Se realizará exclusivamente para los libros de enseñanza secundaria en España, analizando las representaciones utilizadas en relación con las categorías sintácticas, semánticas, pragmático-didácticas y socio-culturales y las dimensiones ya descritas, codificadas como En, Tn y Cn.

Conclusiones. En este apartado se relacionan los datos obtenidos en los campos o categorías señaladas en los apartados anteriores, para poder describirlos coherentemente, de acuerdo con los objetivos de la tesis. Constituye pues una reflexión teórica a la luz dichos datos, que se puede realizar por estar organizados en campos perfectamente identificados y clasificados. Este análisis se dividirá en tres apartados: Socio-cultural, Epistemológico, Didáctico

Esta conclusión tratará de identificar los aspectos más destacados de cada uno de los materiales analizados, resaltando aquellos que puedan ser más peculiares o que puedan caracterizar más nítidamente dicho manual. Esto facilitará la elaboración de las conclusiones finales por medio de la comparación entre las características asociadas a cada obra y permitiendo todo ello establecer las características identificativas de las representaciones utilizadas en Análisis Matemático, de los manuales y de los periodos relativos a la enseñanza del Análisis Matemático.

